LES INTRIGANTS CHEMINS DE LA FOURMI DE LANGTON

Elle va et vient et occupe petit à petit une zone infinie du plan: la fourmi automatique de Langton décrit des trajectoires dont la complexité ne livre que lentement ses secrets.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Une compétition permanente se déroule entre chercheurs en mathématiques et en informatique: il s'agit de trouver des systèmes de règles aussi simples que possible engendrant de la complexité et de l'imprévisible. D'étonnantes découvertes sont régulièrement proposées et il faut souvent des années pour comprendre ces situations définies par quelques mots!

La «fourmi de Langton» est l'un de ces systèmes mystérieux. On l'étudie depuis plus de trente ans. D'année en année, on comprend mieux la complexité qu'elle engendre à partir de presque rien, mais la conjecture la plus simple la concernant reste non résolue.

Cet objet a été défini en 1986 par Christopher Langton, qui était alors chercheur en informatique à l'université du Michigan à Ann Arbor. Il s'intéressait à ce qui, en informatique, peut simuler la vie et il participa à la création du domaine de recherche dénommé «vie artificielle». Voici la définition de sa fourmi:

«Sur un plan recouvert d'un quadrillage de cases blanches ou noires se déplace une flèche, la fourmi, qui prend l'orientation nord, sud, ouest, ou est. Si elle est sur une case blanche, elle tourne de 90° vers la droite, si elle est sur une case noire elle tourne de 90° vers la gauche. Ensuite, elle change la couleur de la case et avance d'une case dans la direction qu'elle indique, puis recommence.»

L'encadré 1 montre ce que donne cette règle sur un plan composé de cases blanches. Elle emprunte un trajet tortueux en laissant temporairement derrière elle des traces de son passage (puisqu'elle change la couleur des cases par où elle passe). Elle repasse souvent là où elle est déjà passée, et donc son comportement dépend en partie de son propre passé.

Son trajet est doublement surprenant. Aux étapes 97, 185 et 369, le dessin des cases présente un centre de symétrie. Pourquoi? On ne sait pas l'expliquer clairement. Voyant cela, on aurait pu s'attendre à ce que, régulièrement, une configuration symétrique réapparaisse. Ce n'est pas le cas, et après l'étape 400 une confusion totale semble s'emparer des mouvements de la fourmi: celle-ci dessine sur le plan un motif d'apparence aléatoire de plus en plus grand. Cette phase désordonnée se prolonge environ sur 10000 étapes. Puis soudain, et c'est la seconde surprise, elle adopte un comportement répétitif décrivant un parcours complexe enroulé sur lui-même et se décalant d'une case en diagonale toutes les 104 étapes. Elle part à l'infini en laissant une trace assez large derrière elle, trace dénommée «l'autoroute». La suite est alors prévisible: du désordre est né, sans raison apparente, une structure ordonnée qui croît indéfiniment et régulièrement.

Vous pouvez mener vos propres expériences avec des logiciels disponibles sur Internet (*voir la bibliographie*). Vous remarquerez alors que, même si le plan comporte au départ des cases noires en nombre fini, et même s'il y en a beaucoup, alors, sans exception, la fourmi se met au bout d'un certain temps à construire une autoroute ayant la même forme que celle obtenue à partir du plan entièrement blanc. Seule la direction diagonale de l'autoroute change; elle peut être NO, NE, SE ou SO. J'ai essayé un très grand nombre de configurations de départ et d'autres en ont essayé encore plus: il ne se produit jamais autre chose que l'apparition de l'autoroute.

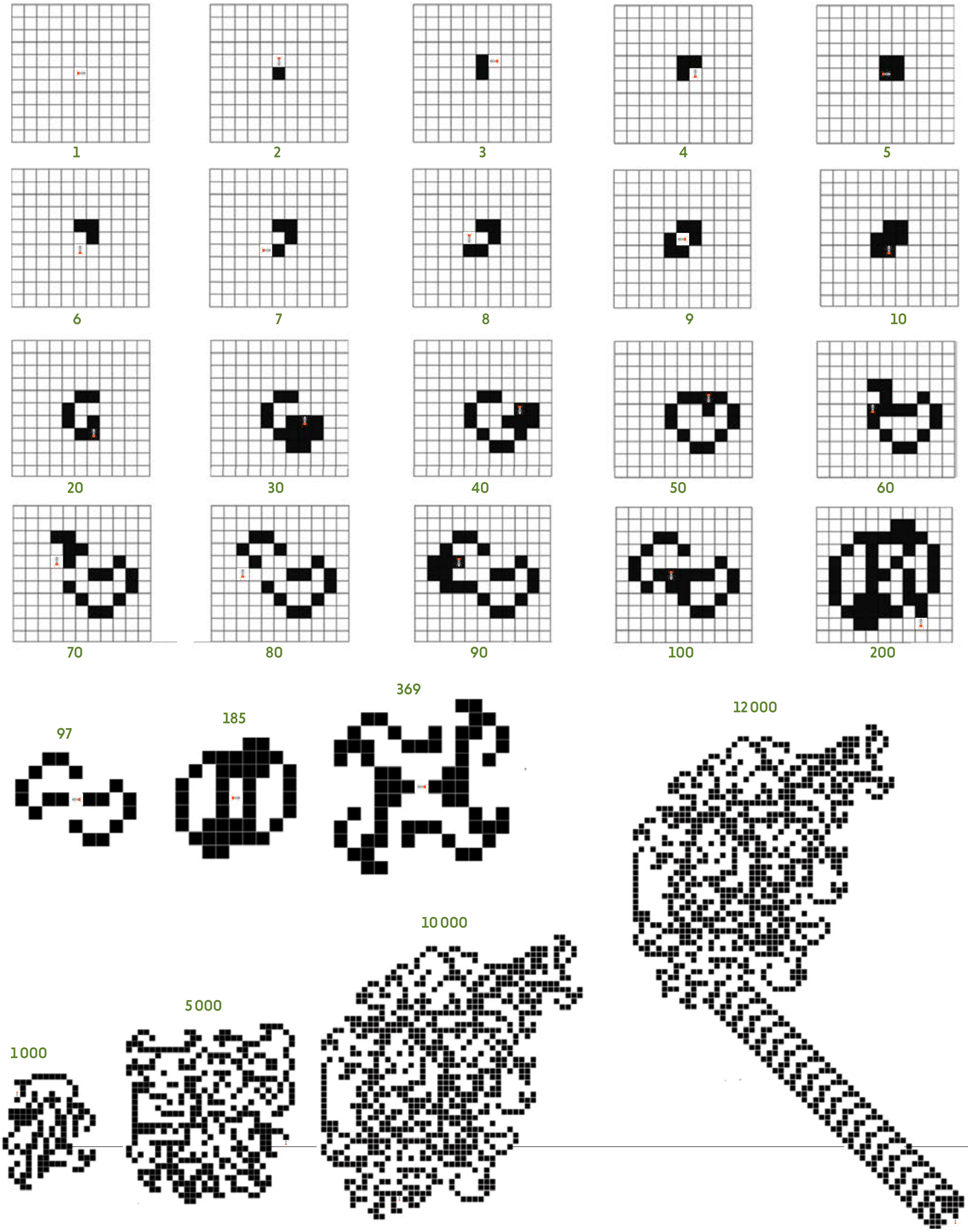
>

Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

1 UN TRAVAIL DE FOURMI

La fourmi de Langton se déplace sur un damier de cases blanches ou noires. Quand elle est sur une case blanche, elle tourne de 90° vers la droite et avance d'une case. Quand elle est sur une case noire, elle tourne de 90° vers la gauche et avance d'une case. Quand elle quitte une case, elle en change la couleur.

Son cheminement quand elle démarre sur un plan tout blanc est donné ci-dessous. Aux étapes 97, 185 et 360, les dessins des cases noires ont un centre de symétrie. Après un comportement complexe pendant 10 102 étapes, elle avance en diagonale de façon répétitive par cycles de 104 étapes : c'est « l'autoroute ».



> On aurait pu observer un comportement périodique, ou d'autres formes de croissances infinies régulières, ou tout simplement un trajet d'apparence aléatoire non répétitif laissant progressivement des traces sur une partie non bornée du plan ou même sur tout le plan. Pourquoi n'est-ce pas le cas?

On formule une conjecture: «Quelle que soit la configuration initiale comportant un nombre fini de cases noires sur le plan, la fourmi de Langton se met, au bout d'un temps fini, à construire l'autoroute et part alors vers l'infini.» La question, posée depuis plus de trente ans, reste sans réponse.

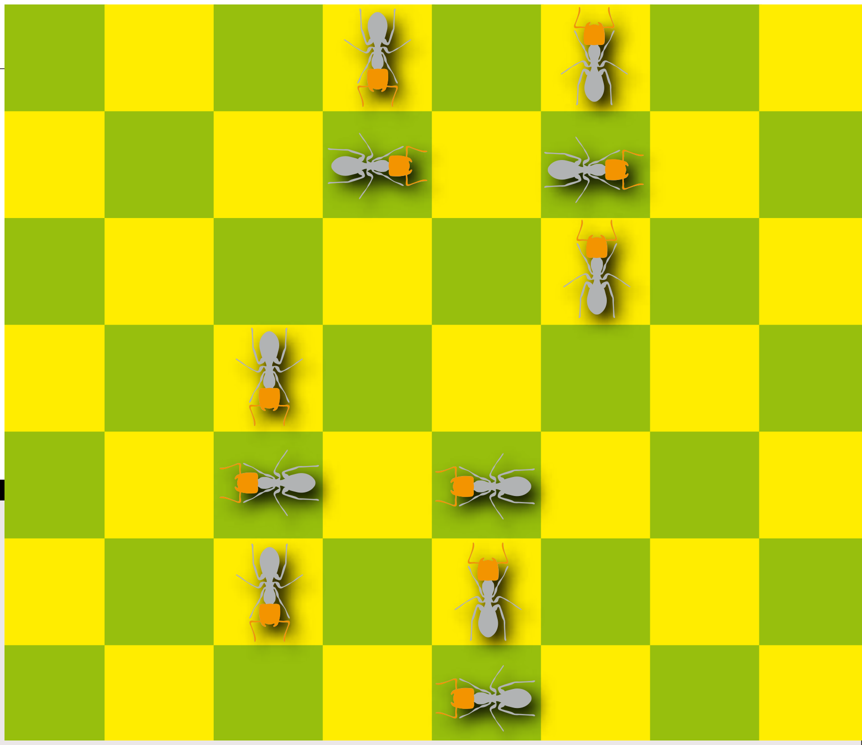
ET S'IL Y A PLUSIEURS FOURMIS?

On a cependant obtenu un résultat qui exclut un devenir périodique: « Quelle que soit la configuration finie ou infinie de cases noires sur le plan au départ, la fourmi de Langton emprunte un trajet passant par une infinité de cases du plan et n'adopte donc jamais un comportement périodique». L'encadré 2 en donne l'astucieuse démonstration.

S'il y a plusieurs fourmis de Langton, tout change. Avec seulement deux fourmis posées sur un plan tout blanc, on peut avoir une situation périodique. La figure *a* de l'encadré 3 montre ce que donnent deux fourmis côte à côte, toutes deux tournées vers la droite sur une même ligne verticale. Au bout de 14 étapes, elles reviennent dans la même position, mais toutes deux tournées vers la gauche. Encore 14 étapes et elles sont revenues dans leur position initiale, cette fois avec la même orientation qu'au départ. Tout recommence donc indéfiniment: la configuration est périodique.

Le déroulement des trajets de ces deux fourmis illustre la capacité de ces fourmis à repasser à l'envers sur leurs traces en effaçant tout de leur passage: les dessins complexes laissés par les deux fourmis ont été effacés par elles-mêmes quand elles reviennent sur leurs traces.

L'explication de ces capacités à effacer ce qu'elles font provient de la réversibilité de la règle qui définit la fourmi. Si, par exemple, dans le cas d'une fourmi, vous l'arrêtez au bout de n étapes, inversez son orientation et la faites



2 UNE FOURMI SEULE VA NÉCESSAIREMENT À L'INFINI

Leonid Bunimovich et Serge Troubetzkoy ont établi en 1992 un joli résultat : la fourmi de Langton ne peut pas avoir un comportement périodique.

Théorème. Quelle que soit la configuration initiale de cases noires et blanches, la fourmi de Langton visite un espace infini.

Démonstration. Colorions l'espace avec un damier vert et jaune. À chaque fois que la fourmi sort d'une case verte, elle entre dans une case jaune et réciproquement, et elle change sa direction d'horizontale en verticale, ou l'inverse. Il en résulte que si, au départ, la fourmi est placée horizontalement sur une case verte, elle sera toujours placée horizontalement sur les cases vertes et verticalement sur les cases jaunes.

Supposons que la fourmi ne visite qu'un espace borné. Parmi les cases visitées un nombre infini de fois, certaines sont situées le plus à gauche possible. Parmi celles-ci, il en existe une, notons-la C, qui est la plus haute possible. Examinons-la. Supposons-la coloriée en vert. La fourmi entre dans cette case par la droite ou par la gauche. Puisque la case à gauche n'est visitée qu'un nombre fini de fois, au-delà d'un certain temps la fourmi n'entre dans cette case que par la droite. Une fois sur deux, elle ressort dans la case immédiatement au-dessus d'elle, qui serait donc une case visitée une infinité de fois. Or c'est impossible, car la case C a été choisie la plus haute possible parmi celles visitées une infinité de fois et situées le plus à gauche possible.

On a supposé que C était verte, mais un raisonnement analogue s'applique quand C est jaune.

On a ainsi une contradiction, et la fourmi visite donc un espace non borné.

Généralisation. Le raisonnement reste valable si l'on considère des turmites, objets similaires à la fourmi de Langton, mais avec des cases à n états parcourus cycliquement, chaque état étant associé à un changement de direction +90° ou –90°.

repartir, elle empruntera un trajet exactement inverse de celui emprunté jusqu'à l'étape *n*, et cela quelle que soit la complexité apparente des traces laissées, lesquelles disparaîtront progressivement comme si la fourmi avait mémorisé son trajet.

À l'exception de ces situations périodiques, on aurait pu penser que, généralisant le cas d'une unique fourmi, le devenir de toute configuration de *n* fourmis serait une partie centrale de cases noires avec *n* autoroutes s'en échappant. On constate effectivement très souvent ce type de situations (*voir l'encadré 3, b*). La conjecture qui affirmerait: «Avec *n* fourmis sur un plan initialement occupé par un nombre fini de cases noires, tout se termine par *n* autoroutes ou une situation périodique» est fausse. En effet, d'autres croissances infinies sont possibles, comme le montre le dessin *c* de l'encadré 3 où un carré croissant indéfiniment est engendré par deux fourmis qui tournent en une danse infinie. Une infinité d'autres évolutions illimitées différentes de *n* autoroutes ou du schéma du carré croissant sont possibles, et savoir ce que donnent *n* fourmis semble impossible autrement qu'en regardant ce qu'elles font.

Notons qu'avec plusieurs fourmis, il faut prévoir le cas où deux fourmis se retrouvent sur la même case au même instant. Une solution consiste à convenir d'un ordre entre les fourmis – elles avancent à tour de rôle selon un schéma périodique fixé – et à admettre qu'elles puissent se trouver à plusieurs sur une même case au même instant sans se gêner. Cette solution est peu satisfaisante, car il faut admettre que 1000 fourmis ou plus pourraient occuper la même case, ce qui est peu réaliste. Une autre solution est de considérer que toutes les fourmis bougent en même temps mais que, lorsque plusieurs arrivent sur une même case, elles s'entretuent et disparaissent. Le logiciel Golly choisit cette seconde solution.

Si toutes les fourmis (de même orientation au départ) sont sur les cases vertes d'un damier jaune et vert, le raisonnement de l'encadré 2 s'applique. Il ne peut donc pas y avoir d'évolution périodique dans ce cas. Deux devenirs restent possibles: ou bien cela se bloque, car les fourmis se détruisent mutuellement et il finit par ne plus y en avoir aucune (c'est le cas pour deux fourmis placées sur une même ligne, séparées d'une case et tournées vers le haut), ou bien la configuration part à l'infini (c'est le cas pour deux fourmis sur une même ligne, séparées de 17 cases et tournées vers le haut). En revanche, si certaines des fourmis (de même orientation initiale) sont sur des cases vertes et d'autres sur des cases jaunes, alors une évolution périodique est possible.

Les turmites sont des fourmis de Langton qui se déplacent sur un plan non plus fait de cases blanches ou noires, mais sur un plan occupé par des cases de *n* couleurs différentes >

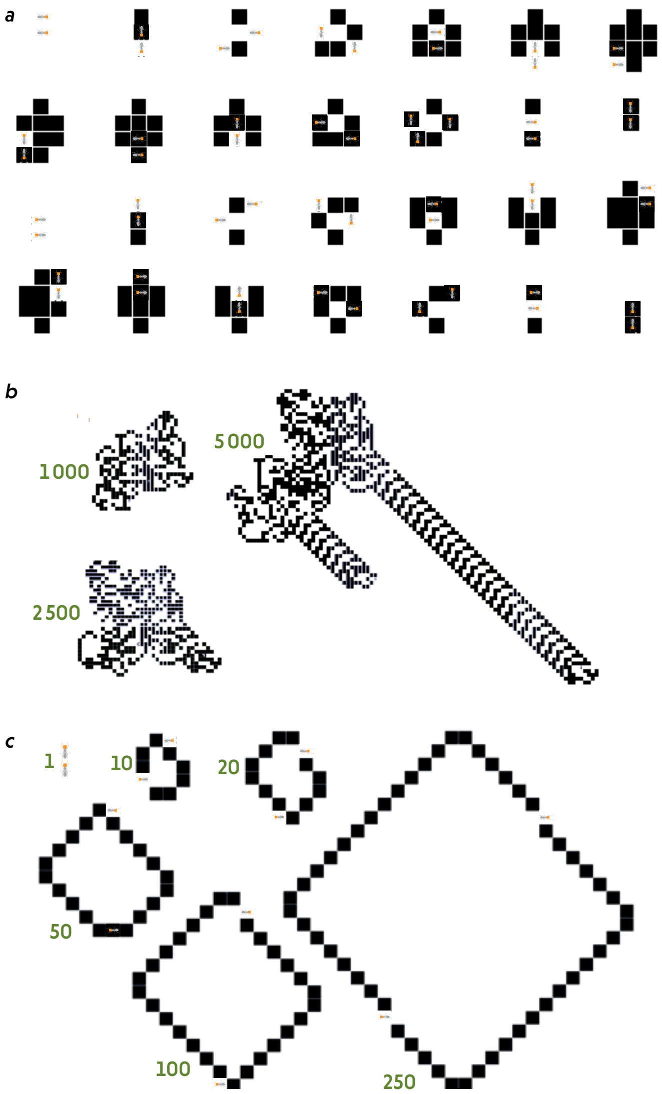
3

AVEC PLUSIEURS FOURMIS

Tout se complique lorsqu'il y a plus d'une fourmi de Langton. Il apparaît notamment des cycles. En *a* sont indiquées les 28 étapes qu'empruntent cycliquement deux fourmis placées initialement côte à côte sur un plan blanc.

Parfois, chaque fourmi construit son autoroute. Ainsi, en *b*, deux fourmis, après une période confuse, construisent chacune leur autoroute.

On est alors tenté de généraliser et de conjecturer que plusieurs fourmis donnent soit un cycle, soit plusieurs autoroutes. Cette conjecture est hélas fausse : des croissances infinies autres que l'autoroute apparaissent. La création d'un carré qui grandit indéfiniment en laissant son intérieur vide est l'un de ces comportements infinis non répétitifs *(c)*.

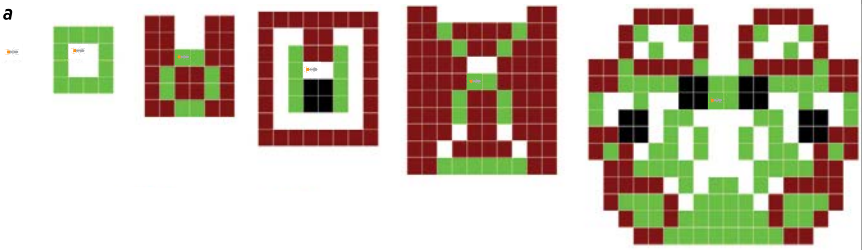


4 DE L'ART AUTOMATIQUE

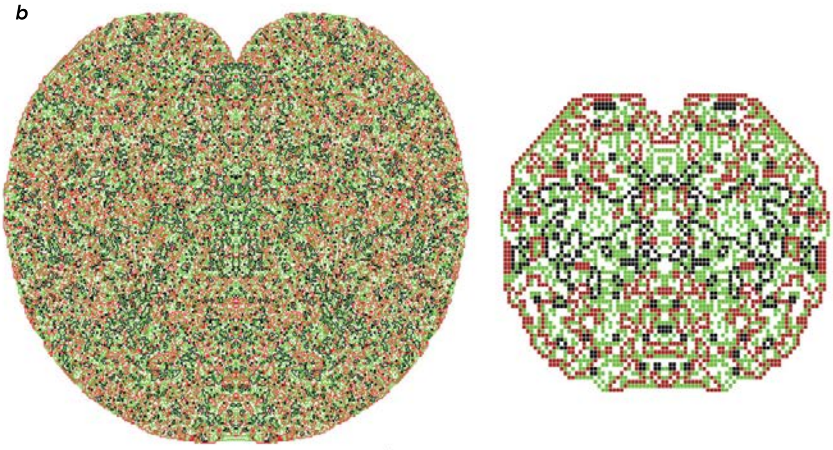
Une turmite est une fourmi sur un plan où, au lieu de noir et blanc, il y a *n* couleurs possibles (par exemple quatre), auxquelles sont associées *n* rotations (par exemple +90°, +90°, −90°, −90°, auquel cas la turmite est notée 1100). Les turmites dont le code des rotations ne comporte que des doubles 0 et des doubles 1 (par exemple 1100, 111100, 00110011, etc.) ont l'extraordinaire propriété de produire régulièrement des dessins symétriques.

La figure *a* montre quelques-unes de ces étapes symétriques pour la turmite 1100. Les turmites donnent naissance à des dynamiques très différentes et produisent des dessins étonnants que l'on peut voir comme un art automatique imprévisible... Les images proposées ont été réalisées avec un programme de Dean Tersigni (voir www.thealmightyguru.com/Wiki/index.php?title=Langton%27s_ant).

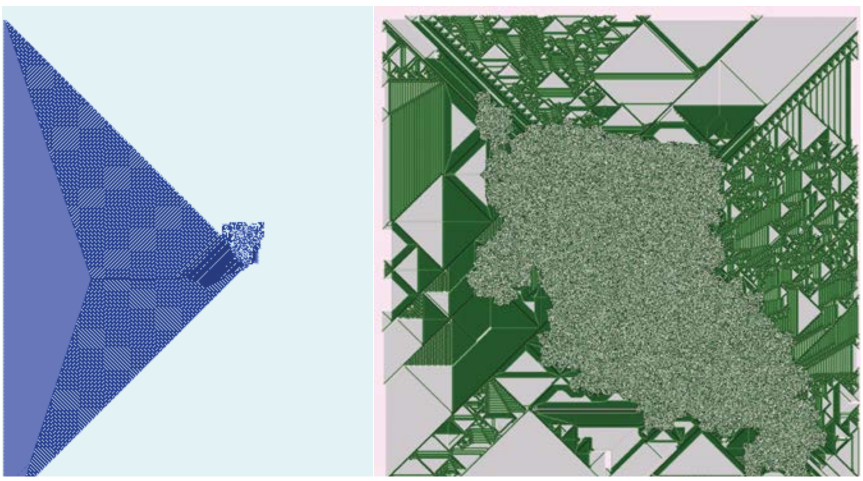
a



b



c



> $C_1, C_2, ..., C_n$, chaque couleur étant associée à un changement de direction +90° ou −90°. On choisit par exemple quatre couleurs C_1, C_2, C_3, C_4 et les changements de direction +90°, +90°, −90° et −90°. De cette suite, on tire le nom de la turmite, ici 1100. Quand la turmite est sur la case C_i, elle change sa couleur en C_{i+1} (on convient que C_n donne C_1), change de direction selon le *i*-ième élément de son nom et avance.

DES TURMITES POUR PLUS DE DEUX COULEURS

Le raisonnement de l'encadré 2 s'applique et l'on est donc en présence d'une variante de la fourmi de Langton qui occupe progressivement une infinité de cases. Ici, elle occupe tout l'espace (*voir l'encadré 4*). Ces turmites présentent une multitude de comportements étranges et tout aussi difficiles à comprendre que la fourmi de base, qui est la turmite 10.

Un comportement extraordinaire a été noté pour la turmite 1100: régulièrement, elle dessine une configuration dotée d'un axe de symétrie (*voir l'encadré 4, a*). Une explication mathématique de ce phénomène ahurissant a été trouvée. La démonstration de ce comportement a été publiée en 1995 par David Gale et trois autres chercheurs (*voir la bibliographie*). Le raisonnement occupe une dizaine de pages et prouve un résultat plus général: toute turmite dont le nom lu cycliquement (après la dernière «lettre», on revient à la première) n'est fait que de 0 ou de 1 répétés un nombre pair de fois (par exemple 1100, 0011001111, 10011001, 011110) crée une infinité de fois un dessin symétrique.

La fascination suscitée par la fourmi de Langton et ses variantes a amené des mathématiciens et informaticiens à travailler assidûment sur le sujet. Ils ont formé des groupes d'étude spécialement dédiés et un extraordinaire résultat a alors été obtenu en 2001 qui constitue une explication indirecte de la complexité des dynamiques observées.

LA COMPLEXITÉ DE LA FOURMI

Anahi Gajardo, Andrés Moreira et Eric Goles, de l'université du Chili, à Santiago, ont démontré que la fourmi de Langton a un pouvoir de calcul universel. Pour leur résultat, une seule fourmi est utilisée. Expliquons ce que signifie cette «universalité».

Un système dynamique est dit universel s'il existe, pour toute fonction $f(n)$ calculable par algorithme (par exemple $n \rightarrow n^2$, $n \rightarrow n$-ième nombre premier, $n \rightarrow n$-ième décimale de π, etc.), une configuration initiale du système qui conduit le système à calculer $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(n)$, ..., ces valeurs étant écrites dans les états du système selon une convention fixée. Pour la fourmi de Langton, les résultats des calculs seront inscrits en utilisant des cases noires du plan où elle circule.

BIBLIOGRAPHIE

D. Maldonado *et al.*, **Nontrivial turmites are Turing-universal**, *Journal of Cellular Automata*, vol. 13, pp. 373-392, 2018.

X. Wang et D. Xu, **A novel image encryption scheme using chaos and Langton's Ant cellular automaton**, *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, pp. 2449-2456, 2015.

S. Hosseini *et al.*, **Generating pseudo-random numbers by combining two systems with complex behaviors**, *Journal of Information Security and Applications*, vol. 19(2), pp. 149-162, 2014.

A. Gajardo *et al.*, **Complexity of Langton's ant**, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 117, pp. 41-50, 2002.

D. Gale *et al.*, **Further travels with my ant**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 17, pp. 48-56, 1995.

L. Bunimovich et S. Troubetzkoy, **Recurrence properties of Lorentz lattice gas cellular automata**, *Journal of Statistical Physics*, vol. 67, pp. 289-302, 1992.

C. Langton, **Studying artificial life with cellular automata**, *Physica D*, vol. 22, pp. 120-149, 1986.

LOGICIELS POUR TESTER LA FOURMI DE LANGTON

http://golly.sourceforge.net

http://www.langtonant.com

http://www.dwmkerr.com/experiments/langtonsant/

http://hai3.net/langtons_ant

Le «jeu de la vie» de John Conway, un célèbre système discret simple étudié depuis 1970, a été démontré universel. On a par exemple construit des configurations du jeu de la vie qui calculent la suite des nombres premiers, ou même qui définissent des machines de Turing quelconques, ce qui est un moyen efficace de démontrer qu'un système est universel.

Pour la fourmi de Langton, le problème se présentait assez mal à cause de la conjecture non démontrée que toute configuration finie du plan conduit la fourmi de Langton à construire une autoroute. Si la conjecture est vraie, alors il est impossible, en déposant un nombre fini de cellules noires sur le plan et une fourmi, de lancer une évolution calculant une infinité de valeurs $f(0), f(1), ..., f(n)$, ... car quand la fourmi se met à construire l'autoroute le calcul devient répétitif et est donc interrompu (sauf pour des fonctions f très simples).

La méthode des trois chercheurs de Santiago du Chili contourne l'apparente impossibilité d'une façon astucieuse dont le principe tient en trois points.

(1) Ils ont d'abord conçu des configurations finies de cases noires qui, quand on y dépose une fourmi, évoluent de manière à calculer une fonction booléenne, quelle qu'elle soit. Une fonction booléenne, par exemple ((*a* ou *b*) et non-*c*), selon les affirmations vraies ou fausses que l'on met à la place de *a*, *b* et *c*, indique si l'affirmation complexe ((*a* ou *b*) et non-*c*) est vraie ou fausse.

Si l'on prend pour *a* «2+1=3», pour *b* «Paris est au Maroc», et pour *c* «le tabac est bon pour la santé», alors (*a* ou *b*) est vrai (car *a* est vrai), non-*c* est vrai, et donc ((*a* ou *b*) et non-*c*) est vraie.

À toute fonction booléenne $g(a, b, c...)$, les chercheurs chiliens associent une configuration finie de cases noires telles qu'en fixant des valeurs booléennes pour *a, b, c*... et en modifiant quelques cases supplémentaires, la fourmi traversant la configuration laisse derrière elle une configuration de cases noires où l'on peut lire le résultat $g(a, b, c...)$. Il convient de noter que le calcul d'une fonction booléenne est fini (il y a 2^n états possibles pour les n variables), et donc que la conjecture de l'autoroute n'interdisait pas cette construction.

(2) Avec ces calculateurs booléens, ils ont montré qu'on pouvait simuler n'importe quel automate cellulaire unidimensionnel.

Pour lancer le calcul infini d'un automate cellulaire de ce type, il faut au préalable noircir une infinité de cases du plan, selon un schéma répétitif. Cette préparation du plan est descriptible de manière finie (car répétitive), elle est donc acceptable dans la définition d'un système universel. Puisque cette préparation du plan introduit une infinité de cases noires, elle n'entrera pas en contradiction avec la conjecture de l'autoroute.

(3) Les chercheurs ont alors utilisé le résultat qu'il existe des automates cellulaires unidimensionnels universels. Ils en ont tiré que : pour toute fonction calculable $f(n)$, il existe une façon descriptible simplement et de manière finie de préparer le plan avec des cases noires et d'y déposer une fourmi de Langton qui en suivant son trajet transformera les zones où elle passera en laissant écrit derrière elle des configurations de cases noires représentant les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, ... Précisons que si l'on change la fonction f, seules un nombre fini de cases doivent être changées dans la préparation du plan avant d'y lancer la fourmi.

La fourmi de Langton à elle seule a donc un pouvoir de calcul universel.

Il faut noter ici que l'article des trois chercheurs donne tous les détails pour effectuer les constructions, mais que celles-ci restent très difficiles à réaliser à cause de l'empilement des phases (1), (2) et (3), et qu'à ma connaissance la construction décrite n'a jamais été menée explicitement pour une fonction précise.

Une telle situation où l'on montre qu'une construction est possible sans la réaliser concrètement n'est pas nouvelle. John Von Neumann avait décrit dans les années 1940 un automate cellulaire autoreproducteur, qui n'a été concrètement programmé et mis en fonctionnement qu'en 1995. Cela illustre le pouvoir du raisonnement mathématique de démontrer l'existence d'objets sans avoir à les construire vraiment.

LA COMPLEXITÉ DES TURMITES

Le résultat de 2001 portant sur la fourmi de Langton a été généralisé en 2018 par une équipe autour de Diego Maldonado, de l'université d'Orléans, et réunissant à nouveau des chercheurs chiliens. Elle a montré que toute turmite non triviale, c'est-à-dire dont le nom n'est pas composé que de 0 ou que de 1, est universelle.

Les travaux se poursuivent et de nouvelles variantes de la fourmi ont été introduites et étudiées. En particulier, la variante du Polonais Pawel Tokarz, définie en 2018, modifie légèrement la règle de la fourmi en la faisant avancer à chaque étape de *k* cases (*k* fixé) au lieu d'une. Une variante programmable de la fourmi due à Mario Markus, Malte Schmick et Eric Goles produit une grande variété de déplacements linaires différents de l'autoroute de Langton. La fourmi de Langton conduit aussi à des applications concrètes: en 2014, des chercheurs de l'université de Mechhed, en Iran, ont construit une fonction pseudoaléatoire utilisable en cryptographie en exploitant les comportements irréguliers de la merveilleuse fourmi et, en 2015, un schéma de chiffrement cryptographique d'images a été tiré du comportement de la fourmi par deux chercheurs de l'université de Dalian, en Chine. ■